

Das SIR-Modell

Michael Hartmann

Linux User Group Augsburg

1. April 2020

Warnung

Ich bin kein Virologe/Epidemiologe!

...aber ein Nerd :-)

- SIR-Modell: Modell, um Epidemien zu beschreiben
- Modelle sind nur so gut wie ihre Annahmen
- unser Modell ist sehr einfach...
- und die Realität ist viel komplexer...

SIR-Modell



SIR-Modell

Wir teilen die Bevölkerung in drei Gruppen ein:

- **S**: Anzahl der *suszeptiblen* Menschen (anfällig für Erreger)
- **I**: Anzahl der *infizierten* Menschen
- **R**: Anzahl der *resistenten* Menschen

SIR-Modell

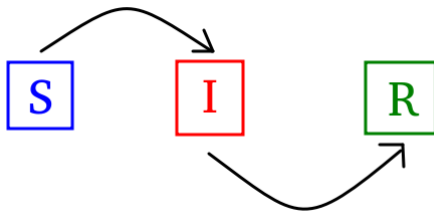
Wir teilen die Bevölkerung in drei Gruppen ein:

- **S**: Anzahl der *suszeptiblen* Menschen (anfällig für Erreger)
- **I**: Anzahl der *infizierten* Menschen
- **R**: Anzahl der *resistenten* Menschen

Konsequenzen:

- **S** nimmt im Laufe der Epidemie ab
- **R** nimmt im Laufe der Epidemie zu
- Anzahl der Menschen $N = S + I + R$ bleibt konstant

SIR-Modell



- $S \rightarrow I$: noch nicht infizierte Menschen stecken sich am Virus an
- $I \rightarrow R$: infizierte Menschen werden wieder gesund oder sterben
- S, I, R ändern sich mit der Zeit: $S(t), I(t), R(t)$

Übergangsraten

$I \rightarrow R$:

- Wenn I Personen für T_I Tage infiziert sind, werden pro Tag I/T_I Personen gesund (oder sterben)
- $\gamma = 1/T_I$; für COVID-19: $T_I \approx 14$, $\gamma \approx 0.07$
- Änderungsrate von I zu R : γI

$S \rightarrow I$:

- Wahrscheinlichkeit, dass ein Suszeptibler infiziert wird:
 - ① Wie viele Personen er/sie pro Tag trifft
 - ② Wie wahrscheinlich eine Ansteckung ist
 - ③ Welcher Anteil der Bevölkerung infiziert ist (I/N)
- Punkt 1 und 2 fassen wir zusammen: β
- Änderungsrate von S zu I : $\beta(I/N)S$

Übergangsraten

$I \rightarrow R$:

- Wenn I Personen für T_I Tage infiziert sind, werden pro Tag I/T_I Personen gesund (oder sterben)
- $\gamma = 1/T_I$; für COVID-19: $T_I \approx 14$, $\gamma \approx 0.07$
- Änderungsrate von I zu R : γI

$S \rightarrow I$:

- Wahrscheinlichkeit, dass ein Suszeptibler infiziert wird:
 - ① Wie viele Personen er/sie pro Tag trifft
 - ② Wie wahrscheinlich eine Ansteckung ist
 - ③ Welcher Anteil der Bevölkerung infiziert ist (I/N)
- Punkt 1 und 2 fassen wir zusammen: β
- Änderungsrate von S zu I : $\beta(I/N)S$

Vollständiges Modell

$$\frac{dS}{dt} = -\beta \frac{I}{N} S \quad \frac{dI}{dt} = \beta \frac{I}{N} S - \gamma I \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I$$

- $\frac{dS}{dt}$: Änderung der Suszeptiblen pro Zeit
- $\frac{dI}{dt}$: Änderung der Infizierten (Neuinfizierte pro Tag)
- $\frac{dR}{dt}$: Änderung der Resistenten (Genesung/Tode pro Tag)

Basisreproduktionszahl

$$\frac{dI}{dt} = \beta \frac{I}{N} S - \gamma I = \left(\underbrace{\frac{\beta}{\gamma}}_{=R_0} \frac{S}{N} - 1 \right) \gamma I$$

- Am Anfang der Epidemie $S \approx N$:

Basisreproduktionszahl

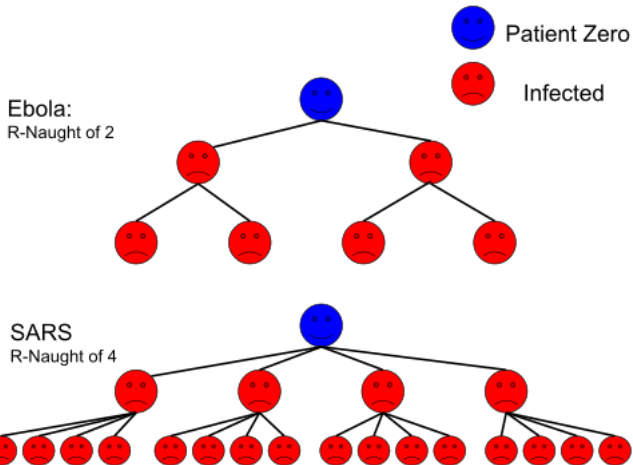
$$\frac{dI}{dt} = \beta \frac{I}{N} S - \gamma I = \left(\underbrace{\frac{\beta}{\gamma}}_{=R_0} \underbrace{\frac{S}{N}}_{\approx 1} - 1 \right) \gamma I$$

- Am Anfang der Epidemie $S \approx N$:

$$\frac{dI}{dt} = (R_0 - 1) \gamma I$$

- R_0 gibt an wie viele Menschen eine infektiöse Person durchschnittlich ansteckt (am Anfang einer Epidemie)
- $R_0 > 1$: exponentielles Wachstum
- für COVID-19: $R_0 \approx 1.4 - 3.9$

Basisreproduktionszahl



Basisreproduktionszahl

Für $\gamma = 0.07$:

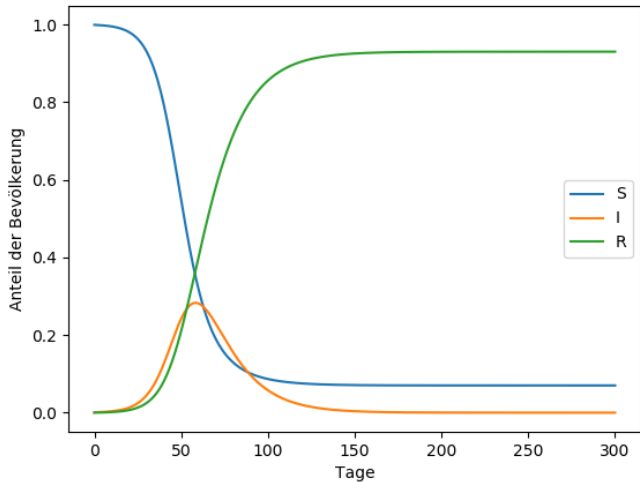
Verdoppelung (in d)	β (in 1/d)	R_0
2	0.42	6.0
3	0.30	4.3
5	0.21	3.0
7	0.17	2.4
14	0.12	1.7

Annahmen des Modells

- Geburten und natürliche Tode können vernachlässigt werden
- Die Gruppe R ist permanent immun
- Homogene Vermischung der Menschen
- ...

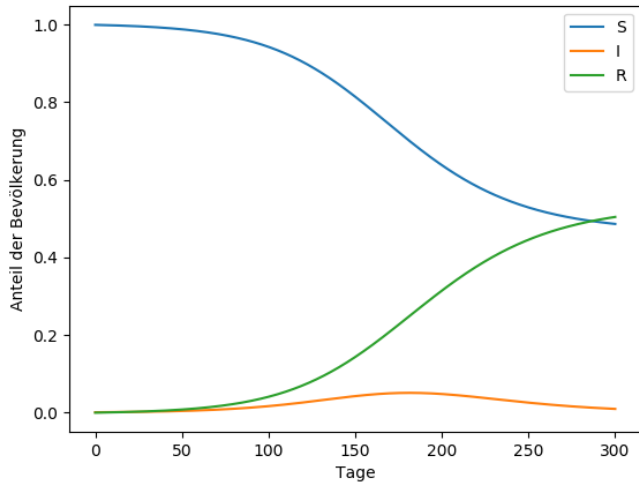
Beispiele

$$\beta = 0.2, \gamma = 0.07$$



Beispiele

$$\beta = 0.1, \gamma = 0.07$$



Was können wir tun?

- Social Distancing: reduziert β
- bessere Hygiene: reduziert β
- Quarantäne (mit Testen): reduziert β
- Impfung: reduziert S , erhöht R

Danke für die Aufmerksamkeit

Links:

- [Simulating an Epidemic](#) (Video von 3blue1brown)
- [Coronavirus – unnötiger Alarm bei COVID-19?](#) (Video von Harald Lesch)